

3. 1. Hauptsatz der Thermodynamik, Energie

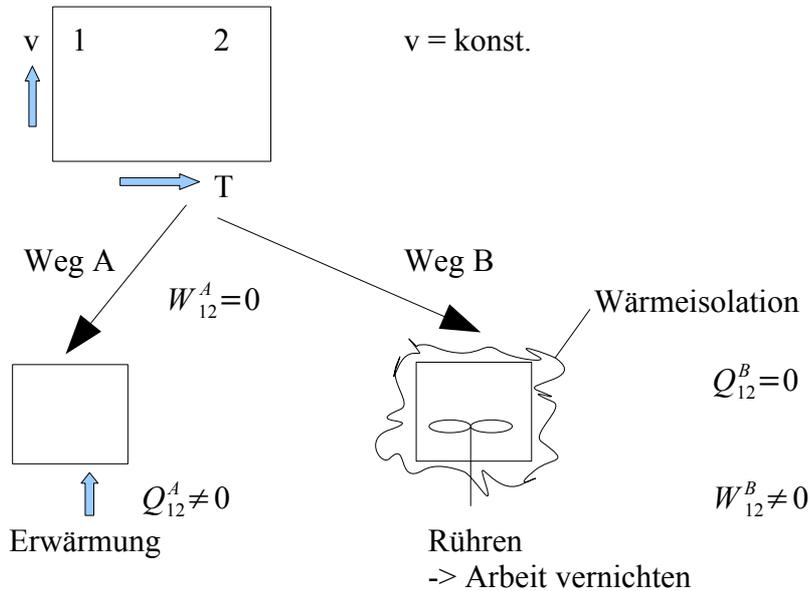
3.1 1. Hauptsatz für das System

Einheitliche Überlegung

Betrachtet: Zwei Zustände eines Systems 1 und 2. Es gibt unendlich viele Wege, die von 1 nach 2 führen.

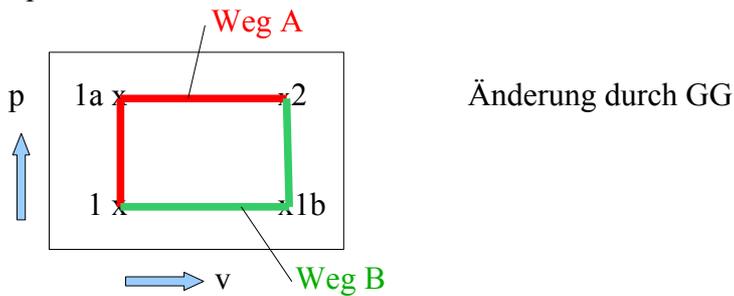
Beispiele: einfaches Fluid

Bsp 1:



-> Weder Wärme noch Arbeit beschreiben den Zustand eines Systems (sind Zustandsgrößen)

Bsp 2:



Jeweils: eine isochore Erwärmung (durch Druckerhöhung)
eine isobare Expansion

Arbeiten:

$$W_{12}^A = \underbrace{W_{(1 \rightarrow 1a)}}_0 + \underbrace{W_{(1a \rightarrow 2)}}_{p_2(v_2 - v_1)}$$

$$W_{12}^B = \underbrace{W_{(1 \rightarrow 1b)}}_{p_2(v_2 - v_1)} + \underbrace{W_{(1b \rightarrow 2)}}_0$$

$$\Rightarrow W_{12}^A \neq W_{12}^B$$

eine Analoge Aussage gilt für die Wärme

=> Wärme und Arbeit hängen von gewählten Weg der Zustandsänderung ab.

Aber (Erfahrungssatz)

Die Summe aus Wärme und Arbeit ist für alle Wege zwischen zwei Zuständen eines Systems gleich.

Im Bsp1:

$$W_{12}^B = Q_{12}^A$$

Im Bsp 2:

$$W_{12}^A + Q_{12}^A = W_{12}^B + Q_{12}^B$$

$Q_{12} + W_{12}$ -> Änderung einer Größe, die nur von 1 und 2 abhängt, aber nicht von dem dazwischen gewählten Weg.

-> Zustandsgrößen

-> Energie E

$$Q_{12} + W_{12} = \Delta E_{12} = E_2 - E_1 \quad (1)$$

1. Hauptsatz für das System

Anm.:

- Allgemeiner Erfahrungssatz
- Gilt egal ob Prozess durch GG oder nicht
- Index 1, 2 im Folgenden weglassen.

Häufig ist es sinnvoll, den inneren und äußeren Zustand eines Systems getrennt zu betrachten.

$$W \begin{cases} W_i & \text{Arbeit am inneren Zustand} \\ W_a & \text{Arbeit am äußeren Zustand} \end{cases}$$

$$W = W_i + W_a \quad (2)$$

$$\Delta E \begin{cases} \Delta E_i & \text{Änderung Energie innerer Zustand} \\ \Delta E_a & \text{Änderung Energie äußerer Zustand} \end{cases}$$

$$\Delta E = \Delta E_i + \Delta E_a \quad (3)$$

Äußerer Zustand

|-> Schwerpunktsmechanik

$$W_a = \Delta E_a \quad (4)$$

$$\Delta E_a = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} \quad (5)$$

$$\Rightarrow W_a = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} \quad (6)$$

Bezeichnung:

Statt E_i -> U innere Energie

Damit (3)

$$\Delta E = \Delta U + \Delta E_a$$

mit (5) =>

$$\boxed{\Delta E = \Delta U + \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot}} \quad (7)$$

Damit andere Schreibweise des 1. Hauptsatzes für das System

(1), (2), (3) =>

$$\boxed{Q + W_i + W_a = \Delta U + \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot}}$$

bzw. wegen (6)

$$\boxed{Q + W_i = \Delta U} \quad !. \text{ HS für Änderungen des inneren Zustands eines Systems.}$$

Anm.:

- Gilt für ruhende wie auch für bewegte Systeme

- $[Q] = [W] = [E] = [U] = \text{J}$

- Andere Schreibweise

spezifisch (Masse bezogen)

$$\boxed{\rho + w_i = \Delta u}$$

ρ, w_i spezifische Wärme, Arbeit (pro kg)

u spezifische innere Energie

- E bzw. U tauchen in 1. HS nur als Änderung auf

-> sie sind nur bis auf eine willkürliche wählbare Konstante festgelegt.

- Innere Energie enthält u.a.:

- ungeordnete kinetische Energie der Moleküle
- Energie der zwischenmolekularen Wechselwirkungen
- Chemische Energie
- Kernenergie
- Oberflächenenergie

usw.

- Die innere Energie enthält nicht:

-> kinetische und potentielle Energie des Systemschwerpunktes.

Differentielle Form vom 1. Hauptsatz innerer Zustand

$$\boxed{dQ + dW_i = du}$$

bzw. Masse bezogen

$$\boxed{dq + dw_i = du}$$

Division von (1) durch differentielles Zeitintervall $d\tau$ (τ Zeit)

$$\frac{(dQ)}{(d\tau)} + \frac{(dW_i)}{(d\tau)} = \frac{(dU)}{(d\tau)}$$

Wärmestrom \dot{Q}
 $\left[\frac{\text{J}}{\text{s}}\right]$

Leistung, hier i.a.

mech. Leistung \dot{W}_i

[W]

Zeitliche Änderung der

der innere Energie

[W]

$$\Rightarrow \dot{Q} + \dot{W}_i = \frac{dU}{(D\tau)}$$

3.2 Innere Energie

Innere Energie U

-> Extensive Zustandsgröße [U] = J = Nm

spezifische innere Energie u

-> intensive Zustandsgröße

$$\left| \begin{array}{l} u = \frac{U}{m} \quad [u] = \frac{J}{kg} \end{array} \right.$$

Weiter betrachtet:

Einfaches System

- Nach der 2- Eigenschaften- Regel muss es einen stoffspezifischen Zusammenhang zwischen u und zwei anderen unabhängigen Zustandsgrößen geben.

-> kalorische Zustandsgleichung

z.B. $U = U(T, V) \Rightarrow$ übliche Darstellung

$$U = U(T, P)$$

$$U = U(P, V)$$

Anm:

- u ist nicht einfach direkt messbar

- Im 1. Hauptsatz taucht immer nur Δu auf

-> u ist nur bis auf eine willkürlich wählbare Konstante festgelegt

-> integrale Form $U(T, V)$ weniger wichtig als die differentielle Form

Differentielle Form von $U = U(T, V)$

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv$$

Historische gewachsene Beziehung

$$c_V \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_V \quad \text{spezifische Wärme bei}$$

$$[c_V] = \frac{J}{kgK} \quad \text{konstantem Volumen}$$

Damit

$$du = c_V dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv$$

Einfachster Fall $dV = 0$

$$\Rightarrow du = c_V dT$$

Wann $dv = 0$?

beliebiger Stoff, isochore Zustandsänderung

Stoff mit $\rho = \text{konst.}$ beliebige Zustandsänderung

Das „Fluid konstanter Dichte“ ist häufig eine gute Näherung für das Verhalten von Flüssigkeiten

Thermische Zustandsgleichung

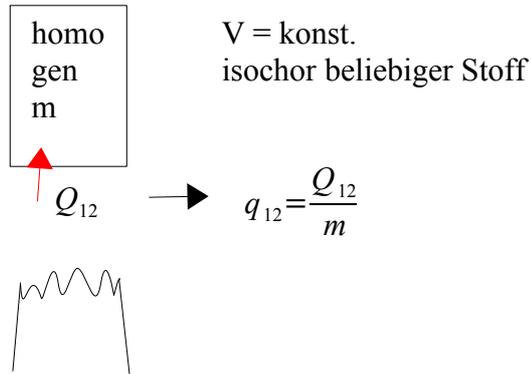
$$\rho = \text{konst.}$$

Kalorische Zustandsgleichung

$$du = c_V dT$$

Anwendung:

Aufheizen eines Fluids in einem starren Behälter



1.HS (spezifisch)

$$q_{12} + \cancel{W_{i12}} = \Delta u_{12} = u_2 - u_1$$

$$= 0$$

Stoffeigenschaften:

$$\Delta u_{12} = \int_1^2 du = \int_1^2 [c_V dT + \frac{(\partial u)}{(\partial v)} du]$$

$$= 0$$

$$\Delta u = \int_1^2 c_V dT$$

|-> ist u.a. $c_V = c_V(T, V)$

muss bekannt sein

Fall $c_V = \text{konst.}$

$$\Rightarrow \Delta u = c_V \Delta T$$

i.a Also:

$$q_{12} = \int_1^2 c_V dT$$

c_V anschaulich: Welche Wärme wird benötigt um 1kg eines Stoffes isobar um 1 K aufzuwärmen.

$$q_{12} = \bar{c}_V \Delta T$$

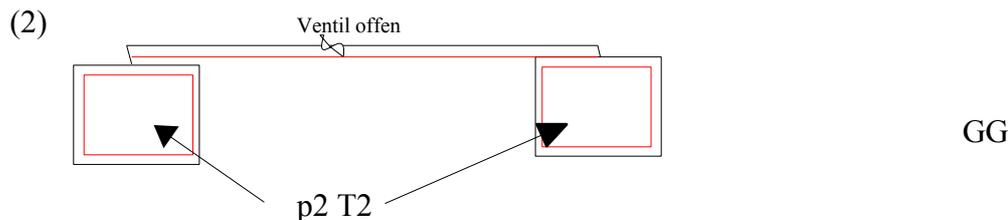
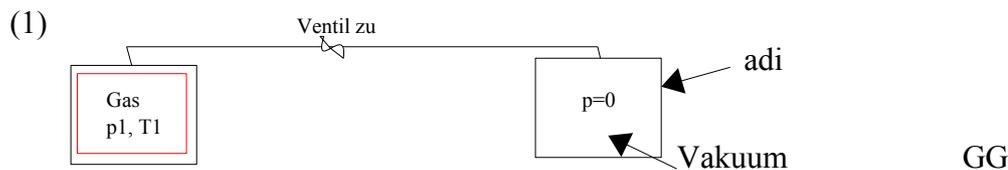
|-> Mittelwert

Kalorische Zustandsgleichung des idealen Gases

empirischer Befund

GAY – USSIAC (1806)

JOULE (1845)



Befund:

Keine Temperaturänderung bei Expansion eines idealen Gases ins Vakuum
(egal wie Behältervolumina gewählt)

-> $T_2 = T_1$

Was bedeutet das hinsichtlich der inneren Energie?

1. HS System

$$Q_{12} + W_{i12} = \Delta U_{12}$$

\downarrow \downarrow
 $=0$ $=0$

adi

Volumenänderungsarbeit?

Zwar $dV \neq 0$ aber Gegendruck $p = 0$

$$W = \int \text{Kraft} * d(\text{Weg}) = 0$$

\downarrow \downarrow
 $=0$ $\neq 0$

$$\Rightarrow \Delta U_{12} = 0 \text{ bzw. } U_2 = U_1$$

$$\Rightarrow U(T_2, V_2) = U(T_1, V_1)$$

mit $T_1 = T_2 = T$

$$\Rightarrow U(T, V_1) = U(T, V_2)$$

unabhängig von Wahl V_2, V_1

$$\Rightarrow U \neq U(V) \text{ bzw. } U = U(T)$$

Bei idealen Gasen ist die innere Energie eine reine Temperaturfunktion

Anm:

Dies folgt auch unmittelbar aus der molekularen Vorstellung des idealen Gases
(Massenpunkt ohne Wechselwirkung -> haben nur kinetische, keine potentielle Energie)

innere Energie id. Gas -> kinetische Energie der ungerichteten Molekülbewegung

Mit Aussage: T ist Maß für diese kinetische Energie,

ist unmittelbar:

$$U_{id.Gas} = U(T)$$

Zusammenfassung: Stoffeigenschaften idealer Gase

Thermische Zustandsgleichung

$$p \cdot V = R \cdot T$$

Kalorische Zustandsgleichung

$$U = U(T)$$

$$\text{bzw. } \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T = 0$$

$$\text{bzw. } du = c_v dT$$

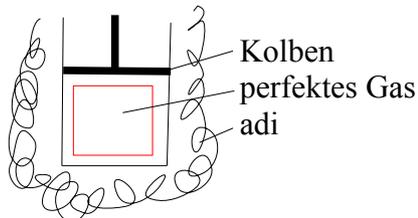
$$\text{bzw. } u_2 - u_1 = \int_1^2 c_v dT$$

Perfekt Gase

sind ideale Gase, für die $c_v = \text{konst.}$

$$\Rightarrow u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1)$$

Adiabatische Zustandsänderung eines perfekten Gases durch GG- Zustände



Differentielle Betrachtung

1. HS \square

$$\begin{array}{l} dq + dw_i = du \\ \left. \begin{array}{l} = 0 \\ \text{adi} \end{array} \right\} \begin{array}{l} -pdv \\ \text{Volumenänderungsarbeit} \end{array} \quad c_v dT \rightarrow \text{Stoffeigenschaften des idealen Gases} \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{-pdv = c_v dT}$$

Elimination von p über $p = \frac{RT}{v}$

$$\Rightarrow -RT \frac{dv}{v} = c_v dT$$

$$-R \frac{dv}{v} = c_v \frac{dT}{T}$$

$$-R \ln \frac{v_2}{v_1} = c_v \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$\ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{-R} = \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{(c_v)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{-\left(\frac{R}{c_v}\right)} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$\text{bzw. } T * v^{\left(\frac{R}{c_v}\right)} = \text{konst.}$$

Vgl. mit Polytrope:

$$T * v^{(n-1)} = konst.$$

$$\Rightarrow u - 1 = \frac{R}{c_V}$$

$$n = 1 + \frac{R}{c_V} = \frac{(c_V + R)}{c_V}$$

$$\chi = \frac{(c_V + R)}{c_V}$$

Eine adiabatische Zustandsänderung eines idealen Gases durch GG ist eine Polytrope mit $u = \chi = (c_V + R) + c_V^{-1}$

Zusammenfassend:

$$p * v^\chi = konst.$$

perf. Gase adi.

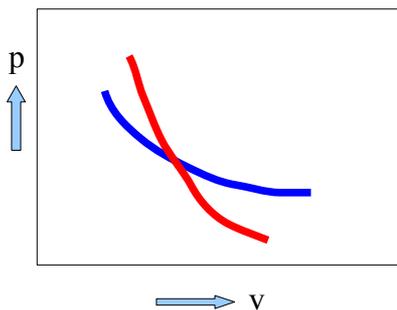
Äquivalent

Zustandsänderung durch GG

$$T * v^{(\chi-1)} = konst \quad \text{bzw.}$$

$$p^{(1-\chi)} T^\chi = konst.$$

Im p-v-Diagramm



$$p * v^\chi = konst.$$

$$\chi > 1$$

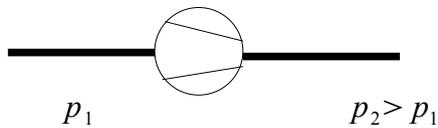
isotherm

$$u = 1$$

$$p * v^1 = konst$$

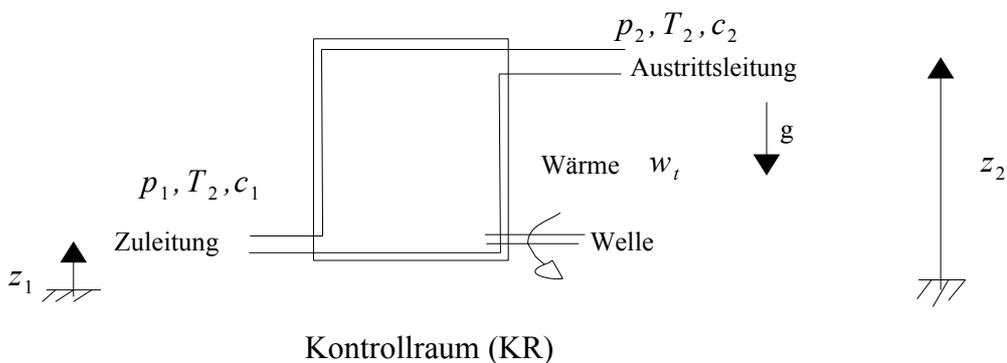
3.3 1.Hauptsatz für den Kontrollraum

Häufig Betrachtung eines Systems ($m=\text{konst.}$) unpraktisch, insbesondere bei durchströmten Maschinen, Apparaten, Bauteilen z.B. Kompressor



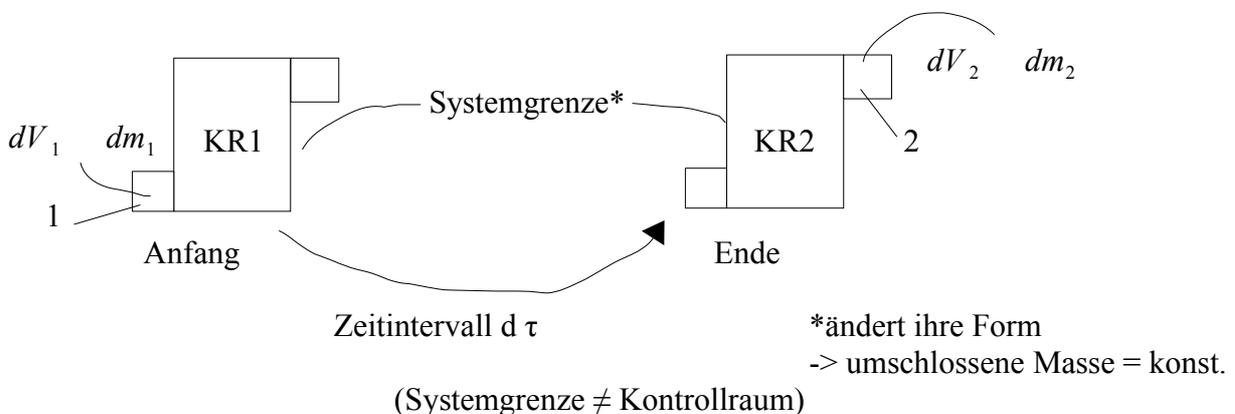
-> Bilanzierung über Kontrollraum (-> ortsfeste Bilanzhülle) zweckmäßig

Betrachtet Maschine, Bauteil



- c Geschwindigkeit
- z Höhe
- g Erdbeschleunigung
- w_t technische Arbeit

Umschreiben 1.HS System auf 1.HS für Kontrollraum
Dazu betrachtet: System, das Kontrollraum durchläuft und zwar:



kleines Zeitintervall $d\tau$ betrachtet:

$dV_1(dm_1)$ tritt in KR ein

$dV_2(dm_2)$ tritt aus KR aus

Kontrollraum ändert seinen Zustand von KR1 \rightarrow KR2

Bevor Energiebilanz betrachtet, zunächst:

Massenbilanz

$$m_{KR1} + dm_1 = m_{KR2} + dm_2$$

$$dm_1 - dm_2 = m_{KR2} - m_{KR1}$$

Hinweis: $dm_1, dm_2 > 0$

Division durch Zeitintervall $d\tau$:

$$\Rightarrow \frac{dm_1}{(d\tau)} - \frac{dm_2}{(d\tau)} = \frac{(m_{KR2} - m_{KR1})}{(d\tau)}$$

Massenströme ein/aus Änderung der Masse im Kontrollraum

$$\Rightarrow \boxed{\dot{m}_1 - \dot{m}_2 = \frac{dm_{KR}}{(d\tau)}} \quad (1)$$

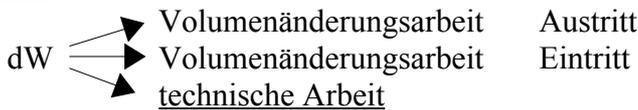
($m_1, m_2 > 0$)

Zurück zum 1.HS

1.HS für System \square

$$dQ + dW = dU + dE_{kin} + dE_{pot} \quad (2)$$

Arbeit



$$dW = p_1 |dV_1| - p_2 |dV_2| + dW_t$$

|
\
 am System vom System
 geleistet geleistet

$$\Rightarrow dW = p_1 v_1 dm_1 - p_2 v_2 dm_2 + dW_t \quad (3)$$

Innere Energie

$$dU = U_{KR2} + dU_2 - U_{KR1} - dU_1 \quad (4)$$

|
\
 $u_2 dm_2$ $u_1 dm_1$

Kinetische und potentielle Energie

$$dE_{kin} = E_{kin2} + dE_{kin2} - E_{kin1} - dE_{kin1} \quad (5a)$$

\
\
 $\frac{1}{2} c_2^2 dm_2$ $\frac{1}{2} c_1^2 dm_1$

$$dE_{pot} = E_{pot2} + g * z_2 dm_2 - E_{pot1} - g * z_1 dm_1 \quad (5b)$$

(3), (4), (5a) und (5b) in (2):

$$dQ + p_1 v_1 dm_1 - p_2 v_2 dm_2 + dW_t = U_{KR2} - U_{KR1} + u_2 dm_2 - u_1 dm_1 + E_{kin2} - E_{kin1} + \frac{1}{2} c_2^2 dm_2 - \frac{1}{2} c_1^2 dm_1 + E_{pot2} - E_{pot1} + g * z_2 dm_2 - g * z_1 dm_1$$

$$\Rightarrow dQ + dW_t$$

$$= \underbrace{U_{KR2} - U_{KR1}}_{dU_{KR}} + \underbrace{E_{kin2} - E_{kin1}}_{dE_{kinKR}} + \underbrace{E_{pot2} - E_{pot1}}_{dE_{potKR}} + (u_2 + p_2 v_2 + \frac{1}{2} c_2^2 + g * z_2) dm_2 - (u_1 + p_1 v_1 + \frac{1}{2} c_1^2 + g * z_1) dm_1$$

Einführung einer neuen energetischen Zustandsgröße

$H = U + p * V$ $h = u + p * v$	<u>Enthalpie</u> <u>spez. Enthalpie</u>
---------------------------------	--

Damit folgt:

$$dQ + dW_t = dU_{KR} + dE_{kinKR} + dE_{potKR} + (h_2 + \frac{1}{2} c_2^2 + g * z_2) dm_2 - (h_1 + \frac{1}{2} c_1^2 + g * z_1) dm_1$$

Nach Division durch Zeitintervall $d\tau$ folgt mit folgenden Bezeichnungen:

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{(d\tau)} \quad \text{Wärmestrom [W]}$$

$$\dot{W}_t = \frac{dW_t}{(d\tau)} \quad \text{technische Leistung [W]}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{(dm_2)}{(d\tau)} &= \dot{m}_2 \\ \frac{(dm_1)}{(d\tau)} &= \dot{m}_1 \end{aligned} \right\} \text{Massenströme ein/aus}$$

$$\frac{(dU_{KR})}{(d\tau)} \quad \text{zeitliche Änderung der inneren Energie des Kontrollraums}$$

$$\frac{(dE_{kin})}{(d\tau)} \quad \text{zeitlich Änderung der kinetischen Energie des Kontrollraums}$$

$$\frac{(dE_{pot})}{(d\tau)} \quad \text{zeitliche Änderung der potentiellen Energie des Kontrollraums}$$

1.HS für den Kontrollraum (instationär)

$$\begin{aligned} \dot{Q} + \dot{W}_t &= \frac{d}{(d\tau)} (U + E_{kin} + E_{pot})_{KR} \\ &+ (h_2 + \frac{1}{2}c_2^2 + g * z_2) \dot{m}_2 \\ &- (h_1 + \frac{1}{2}c_1^2 + g * z_1) \dot{m}_1 \end{aligned} \quad (*)$$

Stationärer Fall

Was heißt „stationär“ ?

-> keine zeitliche Änderung bei ortsfester Betrachtung

$$\Rightarrow \frac{d}{(d\tau)} (U + E_{kin} + E_{pot})_{KR} \equiv 0$$

Ferner (Massenbilanz)

$$\frac{(dm_{KR})}{(d\tau)} = 0 \Rightarrow \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$$

=> 1.HS für den Kontrollraum (stationär)

$$Q + W_t = m (h_2 - h_1 + \frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1))$$

Nah Division durch in \dot{m} mit folgenden Abkürzungen:

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{m}} = q \quad [q] = \frac{J}{kg}$$

$$\frac{\dot{W}_t}{\dot{m}} = w_t \quad [w_t] = \frac{J}{kg}$$

$$\Rightarrow q + w_t = h_2 - h_1 + \frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1)$$

(1.HS stationärer KR)

Bisher nur ein Massenstrom am Ein- und Austritt

Verallgemeinerung für den stationären Fall

$$\begin{aligned} \dot{Q} + \dot{W}_t &= \sum_{jaus} \dot{m}_{jaus} (h_{jaus} + \frac{1}{2}c_{jaus}^2 + g * z_{jaus}) - \\ &= \sum_{jein} \dot{m}_{jein} (h_{jein} + \frac{1}{2}c_{jein}^2 + g * z_{jein}) \end{aligned}$$

1.HS stationärer KR mit mehreren Massenströmen an Ein- und Austritt

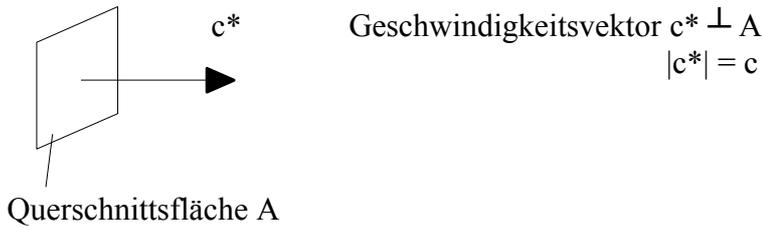
j_{aus} Index Strom Austritt

j_{ein} Index Strom Eintritt

Für Arbeiten mit 1.HS wichtig:

Kopplung: Massenstrom – Geschwindigkeit

Betrachtet hier nur einfachsten Fall



$$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V} = \rho \cdot c \cdot A$$

\dot{V} Volumenstrom ($c \cdot A = \dot{V}$)

Bsp. stat. Fall, ein Massenstrom aus Ein-/ Austritt

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

$$\Rightarrow \rho_1 \cdot c_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot c_2 \cdot A_2$$

3.4 Enthalpie

Definition: $H = U + p \cdot V$

Enthalpie H -> extensive Zustandsgröße

spez. Enthalpie

$$h = \frac{H}{m} \quad h = u + p \cdot v$$

-> intensive Zustandsgröße

Zusammenhang zwischen k und anderen Zustandsgrößen werden (wie z.B. auch $u = u(T, v)$) kalorische Zustandsgleichungen genannt.

In der Regel als Funktion von T, p ausgegeben.

$\Rightarrow h = h(T, p)$ integrale Form

Differentielle Form:

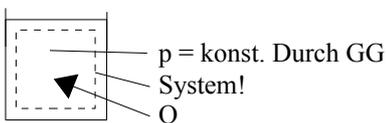
$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp$$

Definition:

$$c_p \equiv \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad \text{spez. Wärme bei konst. Druck}$$

Bsp.:

Isobares Aufheizen eines Fluids in einem Zylinder



1.HS System

$$Q + W_i = \Delta U = U_2 - U_1$$

$$-\int p dV = -p \int dV = -p(V_2 - V_1)$$

$$Q - p(V_2 - V_1) = U_2 - U_1$$

$$Q = U_2 - U_1 + p(V_2 - V_1)$$

$$= U_2 + pV_2 - (U_1 + pV_1)$$

$$\boxed{Q = H_2 - H_1}$$

=> anschaulich Deutung der Enthalpie

$$\Rightarrow Q = m \cdot \Delta h = \int_2^1 dh$$

$$= m \int_2^1 \left(c_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp \right)$$

$$Q = m \int_2^1 c_p dT$$

$$= m \bar{c}_p (T_2 - T_1)$$

\ mittleres c_p

Damit anschaulich c_p

c_p ist die Wärme, die man benötigt um 1 kg eines Stoffes isobar um 1K aufzuheizen.

Allgemeine Beziehung zwischen c_p und c_v und $\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T$ und $\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T$

$$dh = c_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp$$

$$du = c_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv$$

Beziehungen muss es geben, denn es gilt:

$$h = u + p \cdot v$$

$$\Rightarrow dh = du + p dv + v dp$$

???(vielleicht auch ... + $v dp$)

sowie thermische Zustandsgleichung

z.B. $p = p(v, T)$ Herleitung -> Beiblatt 7

Es gilt:

$$\boxed{c_p - c_v = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T + p \right] \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p} \quad (1)$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T = v + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T + p \right] \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T} \quad (2)$$

Auswertung für

a) ideales Gas

b) Fluid konstanter Dichte

a) ideales Gas

(1) mit $u = u(T)$ ideales Gas

$$\text{und } v = \frac{(R \cdot T)}{p} \Rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{p}$$

$$\Rightarrow c_p - c_v = [0 + p] \frac{R}{p}$$

$$\boxed{c_p - c_v = R} \quad \text{ideales Gas}$$

Auswertung mit (2) mit $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = -\frac{RT}{p^2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T &= v + [0 + p] \left(\frac{-RT}{p^2}\right) \\ &= v - \frac{RT}{p} \equiv 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = 0} \quad \text{ideales Gas}$$

$$\left. \begin{array}{l} h = h(T) \\ h \neq h(p) \end{array} \right\} \text{ideales Gas}$$

Völlig im Einklang mit der folgenden Überlegung

$$\begin{aligned} h &= u + p \cdot v \\ &\quad \backslash U(T) \quad \backslash R \cdot T \quad \text{für ideales Gas} \\ \Rightarrow h &= h(T) \quad \text{für ideales Gas} \end{aligned}$$

Zusammenfassend ideales Gas

thermische Zustandsgleichung
kalorische Zustandsgleichung

$$\begin{aligned} p \cdot v &= R \cdot T \\ h &= h(T) \\ \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T &= 0 \\ dh &= c_p dT \\ c_p &= c_v + R \end{aligned}$$

Hinweis: Perfektes Gas

Sowohl c_v als auch c_p sind konstant $c_p = c_v + R$ ($R = \text{konst}$)
 $\Rightarrow \boxed{\Delta h = c_p \Delta T}$ perfektes Gas

b) Fluid konstanter Dichte

$$\begin{aligned} \rho = \text{konst} &\Rightarrow v = \text{konst} \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p &= \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = 0 \end{aligned}$$

(1) $\Rightarrow c_p = c_v$ Fluid konstanter

(2) $\Rightarrow \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = v$ Dichte

Zusammenfassend Fluid $\rho = \text{konstant}$

thermische Zustandsgleichung

$$\rho = \frac{1}{v} = \text{konst}$$

kalorische Zustandsgleichung

$$du = cdT + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv$$
$$dh = cdT + vdp \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 0$$

sowie falls $c_p = c_v = c = \text{konst}$

$$\Delta u = c \Delta T$$

$$\Delta h = c \Delta T + v \Delta p$$

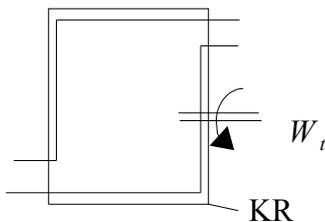
3.5 Technische Arbeit

Anschaulich:

Technische Arbeit ist die Arbeit, die einer durchströmten Maschine (einem Kontrollraum) zugeführt wird bzw. von ihr geleistet wird.

z.B. beim Kompressor bzw. einer Turbine über Welle.

Wozu dient diese Arbeit?



$$W_t \left\{ \begin{array}{l} \text{Änderung im KR} \\ \text{Änderung zwischen Ein- und Austritt} \end{array} \right.$$

Änderung im KR

-> treten nur im instationären Fall auf

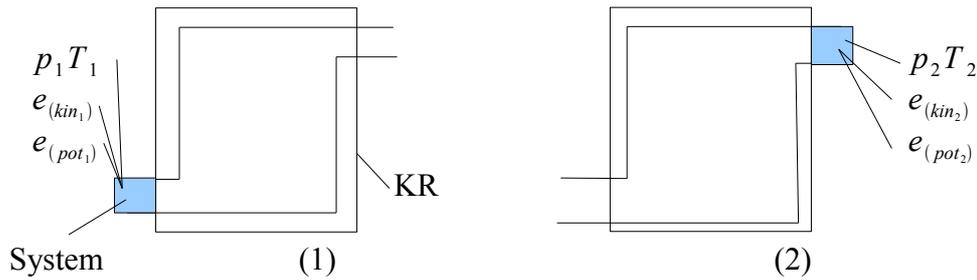
-> Dann (wie beim System)

$$W_{(t, KR)} \left\{ \begin{array}{l} W_{(i, KR)} \text{ wirkt auf inneren Zustand} \\ W_{(a, KR)} \text{ wirkt auf äußeren Zustand} \end{array} \right.$$
$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \frac{(d E_{(kin, KR)})}{(d \tau)}, \left(d \frac{E_{(pot, KR)}}{(d \tau)} \right)$$

-> hier nicht vertieft

-> Einschränkung auf stationären Fall

Betrachtung durchströmte Maschine sowohl mit 1.HS Kontrollraum, als auch mit 1.HS System.



System ist im Zustand (1) am Eintritt des KR
im Zustand (2) am Austritt (-> bewegtes System)

1.HS Kontrollraum □

$$q + w_i = \Delta h + \Delta e_{kin} + \Delta e_{pot} \quad (1)$$

1.HS System □

$$q + w_i + w_a = \Delta u + \Delta e_{kin} + \Delta e_{pot} \quad (2)$$

In (1) und (2) haben q , Δe_{kin} und Δe_{pot} die selbe Bedeutung, z.B. q :
pro Kilogramm des Stoffes beim Durchlaufen des Kontrollraums
übertragene Wärme. (Δe_{kin} , Δe_{pot} -> analog)

Deshalb: (1) - (2)

$$\begin{aligned} w_i - w_i - w_a &= \Delta h - \Delta u \\ &= h_2 - h_1 - (u_2 - u_1) \\ &= h_2 - u_2 - (h_1 - u_1) \end{aligned}$$

mit $h = p * v$

$$\begin{aligned} w_i - w_i - w_a &= p_2 * v_2 - p_1 * v_1 \\ &= \Delta(p * v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} | w_i &= w_i + w_a + \Delta(p * v) \\ \text{mit } w_a &= \Delta e_{kin} + \Delta e_{pot} \\ \boxed{w_i} &= \boxed{w_i + \Delta e_{kin} + \Delta e_{pot} + \Delta(p * v)} \end{aligned}$$

Anschaulich:

Technische Arbeit wird eingesetzt für bzw. genommen aus:

Arbeit am inneren Zustand + Arbeit am äußeren Zustand

(d.h. Δe_{kin} , Δe_{pot}) + Ein- bzw. Ausschleubarbeit ($\Delta(p * v)$)

Auswertung von (1), (2) für Zustandsänderung durch GG

$$\Rightarrow \boxed{w_i = - \int p dv}$$

Mit (1), (2) folgt

$$w_i = - \int v dp + \Delta e_{kin} + \Delta e_{pot} + \Delta(p * v)$$

$$\Delta(p * v) = \int d(p * v) = \int (p dv + v dp) = \int p dv + \int v dp \quad \text{anschaulich -> Beiblatt 8}$$

$$\Rightarrow w_t = -\int p dv + \Delta e_{kin} + \Delta e_{pot} + \int p dv + \int v dp$$

$$\boxed{w_t = -\int p dv + \Delta e_{kin} + \Delta e_{pot}}$$
(3)

gilt für Zustandsänderung durch GG falls
 zusätzlich $\Delta e_{kin} = \Delta e_{pot} = 0$

$$\boxed{w_t = \int v dp}$$

Anwendung:

Reiner Strömungsvorgang durch GG

\ Keine technische Arbeit \ reibungsfreie Strömung
 z.B. Strömung im Rohr

aus (3):

$$\boxed{0 = \int v dp + \Delta e_{kin} + \Delta e_{pot}}$$

bekannte Formel aus Strömungsmechanik

=> **BERNOULLI** – Formel

(gilt für: GG (reibungsfrei, $w_t = 0$))

Anm:

Herleitung in Strömungsmechanik i.a aus Kräfte- bzw. Impulsbilanz

3.6 Anwendung

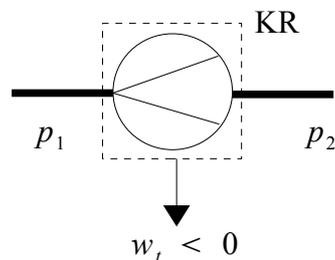
Hier nur stationäre Prozesse betrachtet

3.6.1 „Kalte“ Strömungsmaschinen

arbeiten mit Flüssigkeiten (nicht mit Gasen)

Ziel
 Weg
 Schema

Turbine
 Arbeit gewinnen
 Entspannen der Flüssigkeit

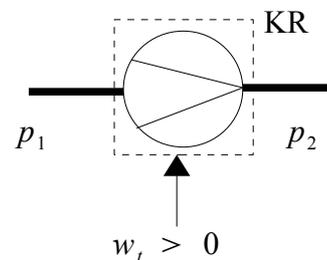


$$p_2 < p_1$$

Annahme

$$\boxed{\begin{array}{l} - \text{Fluid } \rho = \text{konst} \\ - \Delta e_{kin} = \Delta e_{pot} = 0 \end{array}}$$

Pumpe
 Druck erhöhen
 Arbeit verrichten



$$p_2 > p_1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} - \text{Fluid } \rho = \text{konst} \\ - \Delta e_{kin} = \Delta e_{pot} = 0 \end{array}}$$

Zunächst:

a) Änderungen durch GG

-> optimaler Fall

Es gilt vgl. (3) aus Abschnitt 3.5

$$w_t = \int_0^1 v dp + \Delta e_{kin} + \Delta e_{pot}$$

▶ mit $\rho = \text{konst}$ bzw. $v = \frac{1}{\rho} = \text{konst} \Rightarrow v \Delta p = \frac{(\Delta p)}{\rho}$

$$\Rightarrow \boxed{w_t = \frac{(\Delta p)}{\rho}} \quad \text{für beide Maschinen}$$

Hieraus z.B. Leistung:

$$\dot{W}_t = \dot{m} * w_t = \dot{m} \frac{(\Delta p)}{\rho} = \dot{v} * \Delta p$$

Volumenstrom

Anm:

- Für den betrachteten Fall:

Zustandsänderung durch GG ist offenbar ein vollständige Umkehrung
Pumpe <-> Turbine möglich.

- Δp in der Praxis häufig ausgedrückt über „Zulauf- bzw. Förderhöhe“

$$\boxed{\Delta p = \rho * g * \Delta z}$$

b) Adiabatische Zustandsänderung

(muss nicht unbedingt durch GG gehen)

1. HS KR:

$$\dot{q} + w_t = \Delta h + \Delta e_{kin} + \Delta e_{pot}$$

0 (adi) 0 0

$$\boxed{w_t = \Delta h}$$

Δh für Fluid $\rho = \text{konst}$ (mit konstanter Wärmekapazität $c_p = c_v = c$)

$$\boxed{\Delta h = c * \Delta T + v \Delta p}$$
$$\frac{(\Delta p)}{\rho}$$
$$\Rightarrow \boxed{w_t = c * \Delta T + \frac{(\Delta p)}{\rho}}$$

Vgl. mit Ergebnis aus a) zeigt:

Falls adi + GG => $\boxed{\Delta T = 0}$

-> günstiger Fall <-> vollst. Umkehrung des Prozesses ist möglich.

Real: $\boxed{\Delta T > 0}$

Erfahrung zeigt: in adiabatischer Pumpe/ Turbine Erwärmung aufgrund von Reibung möglich, aber wie eine Abkühlung.

Konsequenz:

- für Turbine ($\Delta p < 0$)

$$|w_t| < \frac{|\Delta p|}{\rho}$$

wegen $\Delta T > 0$ weniger technische Arbeit gewinnbar

- für Pumpe ($\Delta p > 0$)

$$|w_t| > \frac{|\Delta p|}{\rho}$$

Ungünstigster Fall

- für Turbine: $w_t = 0$

$$\Rightarrow - \frac{(\Delta p)}{\rho} = c * \Delta T$$

-> Druckdifferenz „verbraten“ -> reine Erwärmung

- für Pumpe: $\Delta p = 0$

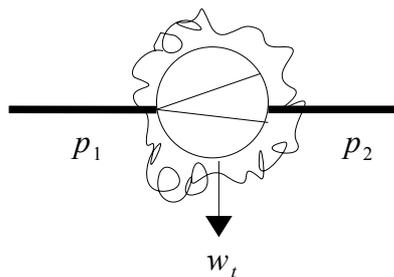
$$\Rightarrow w_t = c * \Delta T$$

-> Arbeit „verbraten“

Merke:

Zustandsänderungen durch GG (hier: $\Delta T = 0$) sind umkehrbar. Sie liegen auf der Grenze zwischen Möglichen und Unmöglichen.

Unmöglich z.B. adi Turbine ohne Δp nur durch Abkühlung einer Flüssigkeit.



$$p_1 = p_2$$

1.HS erlaubt:

$$\begin{aligned} q + w_t &= \Delta h + e_{kin} + \Delta e_{pot} \\ &= c * \Delta T + v dp \end{aligned}$$

$$\Delta T < 0 \rightarrow w_t < 0$$

-> Arbeit gewonnen

aber: -> nie beobachtet

-> näheres siehe 2. Hauptsatz

3.6.2 Thermische Strömungsmaschinen

-> arbeiten mit Gasen

	<p>Turbine Arbeit gewinnen Entspannen des Gases</p>	<p>Kompressor Druck erhöhen Arbeit verrichten</p>
Ziel		
Weg		
Schema		
Annahme	<p>- perfektes Gas - $\Delta e_{kin} = \Delta e_{pot} = 0$</p>	<p>- perfektes Gas - $\Delta e_{kin} = \Delta e_{pot} = 0$</p>

a) Änderung durch GG

-> optimaler Fall

Es gilt vgl. 3.5

$$w_t = \int v dp$$

Falls Prozess durch Polytrope beschreibbar ($p * v^m = konst$)

-> $\int v dp$ lösbar

$$\Rightarrow w_t = \frac{n}{(n-1)} p_1 v_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - 1 \right] \quad \text{für } n \neq 1 \quad (1)$$

Falls zusätzlich: adiabatisch

$$\Rightarrow u = \kappa = \frac{(c_v + R)}{c_v} = \frac{c_p}{c_v} \quad (2)$$

(1) und (2) gelten gleichermaßen für Turbine und Kompressor
(Zustandsänderung durch GG wieder umkehrbar)

b) Adiabatische Zustandsänderung

(muss nicht unbedingt durch GG gehen) -> realer Fall

$$0 + w_t = \Delta h + \underbrace{\Delta e_{kin} + \Delta e_{pot}}_{\text{Annahme}}$$

$$\Rightarrow w_t = \Delta h$$

Perfektes Gas : $\Delta h = c_p * \Delta T$

$$\Rightarrow \boxed{w_t = c_p * \Delta T} \quad (3)$$

Damit kann z.B. die Endtemperatur bei der adiabatischen Kompression (Expansion) berechnet werden

$$\Rightarrow T_2 = T_1 + \frac{w_t}{c_p}$$

für $w_t \neq 0$ immer Temperaturänderung (ganz anders als beim Fluid $\rho = \text{konst.}$)

Falls adiabatisch + Zustandsänderung durch GG

$$\rightarrow p * v^\kappa = \text{konst} \quad ; \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

$$\Rightarrow p^{(1-\kappa)} * T^\kappa = \text{konst}$$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{(\kappa-1)}{\kappa}} \quad (4)$$

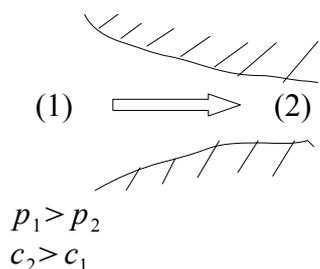
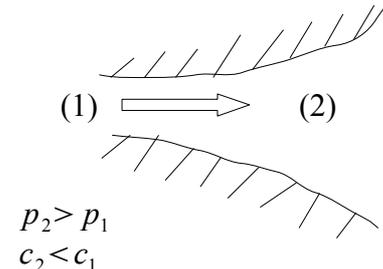
(3) in Verbindung mit (4) ist äquivalent zu (1) in Verbindung mit (2)

Anm:

Auch hier ist das GG der günstigste Fall. Die Betrachtung ist aber nicht mehr so einfach wie bei Fluiden $\rho = \text{konst.}$ Insbesondere ist der günstigste Fall hier nicht mehr $T_2 = T_1$ -> vertieft: 2.HS

3.6.3 Düse/ Diffusor

-> reine Stömungsvorgänge ohne technische Arbeit

	Düse	Diffusor
Ziel	Δe_{kin} aus Δp gewinnen	Δp aus Δe_{kin} gewinnen
Weg	Strömungskanal Mit geeignetem Querschnittsverlauf	Strömungskanal Mit geeignetem Querschnittsverlauf
Skizze	 <p style="text-align: center;">$p_1 > p_2$ $c_2 > c_1$</p> <p style="text-align: center;">$w_t = 0$</p>	 <p style="text-align: center;">$p_2 > p_1$ $c_2 < c_1$</p> <p style="text-align: center;">$w_t = 0$</p>

Zusätzlich Annahme:

$$\boxed{\Delta e_{pot} = 0}$$

horizontale Düse/ Diffusor

Beachte für Design der Kanalkontur ist die Kontinuitätsgleichung wichtig

$$\dot{m} = \rho * c * A = \text{konst}$$

↘ Querschnittsfläche

$\rho * c * A$ an jeder Stelle gleich (für stationären Prozess)

1) Fluid $\rho = \text{konst}$

a) Falls Zustandsänderung durch GG

$$\int_0^1 w_t = \int v dp + \Delta e_{kin} + \Delta e_{pot}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{(p_2 - p_1)}{\rho} + \frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2) \quad (*)$$

- Falls GG: Vorgänge in Düse/ Diffusor vollständig umkehrbar
- (*) ist im Prinzip wieder aus Bernoulli- Gleichung zu erhalten.

b) adiabatisch, muss nicht durch GG gehen

$$\int_0^1 q + \int_0^1 w_t = \Delta h + \Delta e_{kin} + \Delta e_{pot}$$

\swarrow
 $c * \Delta T + v \Delta p$

$$\Rightarrow 0 = c * \Delta T + \frac{(\Delta p)}{\rho} + \Delta e_{kin}$$

Vgl. mit (*) zeigt, dass:

adi + GG $\Rightarrow \Delta T = 0$ (optimaler Fall)

Real: $\Delta T > 0$

\rightarrow Führt zu Umwandlungsverlusten bei $\frac{(\Delta p)}{\rho} \leftrightarrow \Delta e_{kin}$

2) Perfektes Gas

a) GG

$$\int_0^1 w_t = \int v dp + \Delta e_{kin} + \Delta e_{pot}$$

z.B Polytrope

Falls adi + GG

$$p * v^\kappa = konst$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

Integral $\int v dp$ nach Einsetzen Polytropenbeziehung lösbar:
Wieder Prozess in Düse und Diffusor vollständig umkehrbar (GG).

b) adiabatisch (nicht unbedingt durch GG)

$$\int_0^1 q + \int_0^1 w_t = \Delta h + \Delta e_{kin} + \Delta e_{pot}$$

\swarrow
 $c_p \Delta T$

$$0 = c_p(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2)$$

Falls adi + GG :

$$p^{(1-\kappa)} T^\kappa = konst$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

3.6.4 Drossel

Drosselung (eines Stoffstroms)

Druckabsenkung ohne Änderung der kinetischen oder potentiellen Energie und ohne verrichten von Arbeit.

Beispiele mit Drosselwirkung:

- Ventile
- Blende
- Filter

Symbol



Typischer nicht umkehrbarer Prozess. Von allein baut sich der Druck nicht wieder auf (Δp „verbraten“ -> geht letztlich durch Verwirbelungen verloren -> Dissipation)

Anm:

- Drossel ist im Prinzip eine Düse im ungünstigsten Fall, wenn nämlich keine Geschwindigkeitserhöhung erzielt wird.
- Es wäre unsinnig zu versuchen, die Vorgänge bei einer Drosselung als „Zustandsänderung durch GG“ zu beschreiben.

Adiabatische Drossel

1.HS

$$\int_0^0 \dot{q} + \int_0^0 \dot{w}_t = \Delta h + \int_0^0 \dot{\phi}_{kin} + \int_0^0 \dot{\phi}_{pot}$$

$$\boxed{\Delta h = 0} \quad \text{Drossel adiabatisch} \qquad (1)$$

a) Fluid $\rho = konst$

$$(1) \Rightarrow 0 = \Delta h = c * \Delta T + v dp$$

$$\Rightarrow \boxed{T_2 - T_1 = \frac{(p_1 - p_2)}{(\rho * c)}}$$

Temperaturerhöhung durch Reibung

b) Perfektes Gas

$$(1) \Rightarrow 0 = \Delta h = c_p * \Delta T$$

$$\Rightarrow \boxed{T_2 = T_1}$$

3.7 Erster Hauptsatz für Kreisprozesse

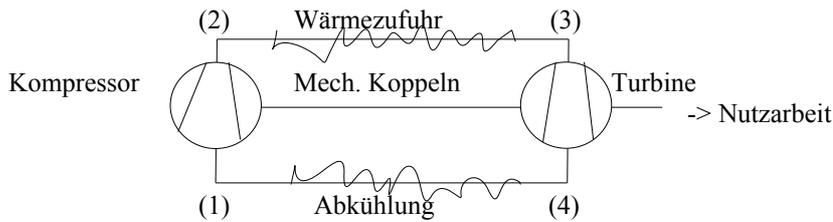
Kreisprozess

Ein System durchläuft einen Kreisprozess wenn nach Zustandsänderungen sein Endzustand wieder gleich dem Anfangszustand ist.

Beispiel:

Geschlossener JOULE – Prozess

Ziel: Umwandlung von Wärme in Arbeit



Arbeitsmedium: Gas

- 1 -> 2 adi. Kompression
- 2 -> 3 isobare Wärmezufuhr
- 3 -> 4 adi. Expansion
- 4 -> 1 isobare Abkühlung

1.HS (allgemein)

$$Q + W = \Delta \text{Energie}$$

Da für Kreisprozess

Anfangszustand = Endzustand

$$\Rightarrow \Delta E = 0 \quad \text{nach einem Druckverlauf}$$

$$\Rightarrow Q + W = 0 \quad \text{für gesamten Kreisprozess}$$

$$\text{bzw. } \oint dQ + \oint dW = 0$$

\oint . Integral über geschlossenen Weg (Kreisintegral)

$$\text{bzw. } \sum (Q_j + W_j) = 0$$

alle Teilschnitte des Kreisprozesses

Bsp. JOULE – Prozess

$$q_{12} + w_{(t_{12})} + q_{23} + w_{(t_{23})} + q_{34} + w_{(t_{34})} + q_{41} + w_{(t_{41})} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{|w_{(t_{34})}| - |w_{(t_{12})}|}_{\text{Nutzarbeit netto gewonnen}} = |q_{23}| - |q_{41}|$$

= Differenz von zu- und abgeführter Wärme

Anm:

Gilt allgemein für Wärme – Kraft Prozesse

Allgemeine Aussage für Kreisprozesse

Die im Kreisprozess insgesamt übertragbare Wärme und Arbeit sind betragsmäßig gleich.

Arbeit bei Kreisprozessen

Wenn man den vollständigen Durchlauf betrachtet, ist die Unterscheidung $w_t \leftrightarrow w_i$ unwichtig.

Warum?

Betrachte ein differenzielles Element beim Durchgang durch ein Kontrollraum (vgl. Abschnitt 3.5)

$$\text{1.HS KR} \quad dq + dw_t = dh + de_{kin} + de_{pot}$$

$$\text{1.HS Syst} \quad -dq + dw_i = du$$

$$\frac{dq + dw_t}{-dq + dw_i} = \frac{dh + de_{kin} + de_{pot}}{du}$$

alles Änderungen von Zustandsgrößen

$$\Rightarrow \oint dw_t - \oint dw_i = \underbrace{\oint dh - \oint du + \oint de_{kin} + \oint de_{pot}}_{=0}$$

Kreisintervall über Zustandsgrößen immer Null

$$\boxed{\oint dw_t = \oint dw_i} \quad (*)$$

Anschaulich Interpretation für Kreisprozess, die vollständig durch GG laufen

$$\oint dw_t = \oint pdv$$

$$\oint dw_i = \oint vdp + \underbrace{\oint de_{kin}}_0 + \underbrace{\oint de_{pot}}_0$$

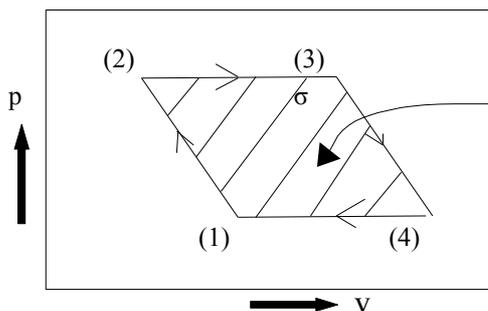
$$(*) \Rightarrow \boxed{-\oint pdv = \oint vdp}$$

-> vom Kreisprozess umschlossene Fläche im p- v- Diagramm

-> Beiblatt 9 (neue Version im www)

Für Beispiel Joule - Prozess

falls alles durch GG



Netto gewonnene Arbeit entspricht Differenz aus zu- und abgeführter Wärme